TENZORY

* formální zavedení bylo v lin. algebře
* různá značení (výhody / nevýhody)
* základní operace
* 3 různé způsoby zavedení
  * tenzor součin vekt. a kovekt. prostoru (konstruktivní, objektové)
  * multi-lin zobr. na vekt. a kovekt. (z lin. algebry, ∀ lin. zobr. pomocí tenzorů = univerzalita, nelin. zobr: taylor. rozvoj → mocnina multilin. ∞-dim. prostory → spojité indexy x → teorie pole)
  * komponenty v bázi + transformační vlastnosti (z fyziky, lze zobecnit − ∀ reprezentace grupy transformací báze dává transformace komponent nového objektu − př: hustoty − tak aby šlo integrovat)
* my budeme nahlížet objektově − ostatní konstrukce budou vlastnosti

TENZOROVÝ SOUČIN

Def: $V_1, V_2, \dots, V_K$ vekt. pr. nad $\mathbb{K}$ * např. $V = \mathbb{T}_x M$, není důležité teď

* zavedu multi-násobení, asociativita: ∃ kan. isomorfismus

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_K = \mathrm{Free}[V_1 \times V_2 \times \dots \times V_K]\big|_{U_0}$$

* vekt. prostor generovaný lin. kombinacemi k-tic vektorů
* U_0 vekt. podprostor prvků které identifikuji s 0

U_0 $\quad [a_1, \dots, r a_s, \dots, a_K] - r[a_1, \dots, a_s, \dots a_K]$

$\quad [a_1, \dots, u+v, \dots, a_K] - [a_1, \dots, u, \dots a_K] - [a_1, \dots, v, \dots a_K]$

* chci ztotožnit $r(a \otimes b) = (ra) \otimes b = a \otimes (rb)$ a také $(a+b) \otimes c = a \otimes c + b \otimes c$

* tenz. součin = třída ekvivalence s identifikací podle U_0
* důležité jsou vlastnosti ne tato konkrétní realizace
* tyto vlastnosti plynou i z jiných definic

$a_1 \otimes \dots \otimes a_K = [a_1, \dots, a_K]\big|_{U_0}$ * k-tice s prvky $a_1, \dots, a_K$ s pravidly z U_0

$(U \otimes V) \otimes W = U \otimes V \otimes W$

* formálně jiné, ale ∃ isomorfismus → nebudeme odlišovat

$U \otimes V\,,\ V \otimes U$

* formálně jiné, $\exists$ isomorfismus
  - $V \neq U$: $|x\rangle|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle|x\rangle$
    * nelze splést $\rightarrow$ můžeme zaměňovat (i když stejně velké)
  - $V = U$ $\quad V \otimes V$

    $a \otimes b \neq b \otimes a$

    * přestože existuje překlad (prohození prostorů), nemůžeme identifikovat protože a i b patří do V
    * tenzorový součin není komutativní
    * zavedením (abstraktních) indexů si prostory označíme (a tím odlišíme) a budeme moci komutovat

ZNAČENÍ TENZORŮ

součinový tenzor

$$u \otimes v \otimes \phi \in V \otimes V \otimes U\,, \quad u, v \in V,\ \phi \in U$$

$\underline{a}$ $\underline{b}$ $\underline{A}$ * abstraktní indexy

* potřebujeme značku ke každému slotu
  * komponentové indexy – bezpečné pokud nepoužijeme žádnou speciální vlastnost báze (souřadnic) tzn. musíme nechat úplně obecnou bázi
    – stále vznáší zbytečnou volbu báze (souřadnic)
  * abstraktní indexy – jsou pouze jména
    – neběží přes žádné hodnoty!
    – občas tučně (skripta)

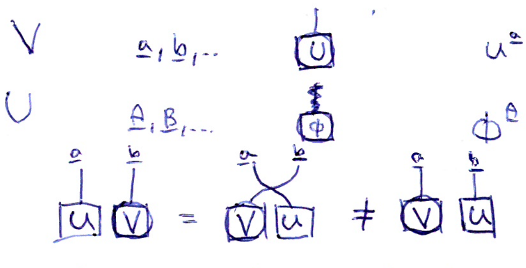
obecný tenzor

$$T^{\underline{abA}} \in V \otimes V \otimes U$$

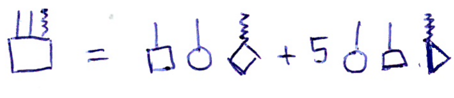
$$(u \otimes v \otimes \phi)^{\underline{abA}} = u^{\underline{a}} \otimes v^{\underline{b}} \otimes \phi^{\underline{A}}$$

$$(u \otimes v)^{\underline{ab}} = u^{\underline{a}} \otimes v^{\underline{b}} = v^{\underline{b}} \otimes u^{\underline{a}} = (v \otimes u)^{\underline{ba}} \neq (v \otimes u)^{\underline{ab}}$$

* když jsem pojmenoval sloty můžu komutovat ale musím spolu s názvy slotů (abstr. indexy)
* konvence: $u \otimes v = uv$ (nebudu psát $\otimes$)
* diagramatické značení
  * každý prostor nožička (stejné mají stejnou).
  * pevné pořadí nožiček, libovolné umístění symbolů



$$T^{\underline{abA}} = u^{\underline{a}} v^{\underline{b}} \phi^{\underline{A}} + 5\, v^{\underline{a}} u^{\underline{b}} \psi^{\underline{A}}$$



* lepší pro učení a kombinatorické úvahy (sym./antisym)

Def: tenzory typu (K,L) nad V (*: teď neuvažujeme $V\otimes U$)

$$V^K_L = \underbrace{V\otimes\dots\otimes V}_{K}\otimes\underbrace{V^*\otimes\dots\otimes V^*}_{L}$$

V $\quad a^{\underline m}$ $\quad \vec a$ $\qquad T^{\underline{abc}}_{\underline{ef}} \in V^3_2$

V^* $\quad a_{\underline m}$ $\quad \underset{\to}{a}$

* V a V^* lze prohazovat dokud nemám ztotožnění (pomocí metriky)
  * buď řekneme explicitně kam snížit / zvýšit
  * nebo si necháme místo (automaticky) $R_{\underline{ab}}{}^{\underline c}{}_{\underline d}$

  } zatím neumíme snižovat / zvyšovat

OPERACE NA TENZORECH

lineární operace je dána akcí na součinových tenzorech
* bázi lze vyrobit ze součinových tenzorů
* lineární operace stačí definovat na bázi → linearitou rozšíříme na obecný tenz.

zúžení (kontrakce)

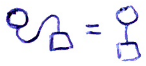
$\alpha\cdot a \qquad \cdot : V\times V^* \to \mathbb{R}$

$C^j_i : V^K_L \to V^{K-1}_{L-1}$

* součinový tenzor, pak rozšíříme na celé V^K_L
* pozor: indexy i, j, k zde jen číslují vektory, formy (nejsou komponenty)

$$a_1\dots a_j\dots a_K\,\alpha^1\dots\alpha^i\dots\alpha^L \to (a_j\cdot\alpha^i)\,\underbrace{a_1\dots a_K}_{\text{bez } a_j}\,\underbrace{\alpha^1\dots\alpha^L}_{\text{bez } \alpha^i}$$

$\alpha\cdot a = \alpha_{\underline m} a^{\underline m} = \alpha_m a^m$



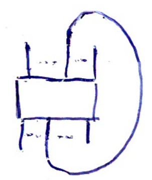
* bez kontrakce: $\alpha a \leftrightarrow \alpha_{\underline m} a^{\underline n} \leftrightarrow$

* značení pomocí abstraktních indexů motivováno vyjádřením kontrakce v komponentách (jen zopakuji jméno prostoru)
* $\alpha_{\underline m} a^{\underline m}$ není sčítání narozdíl od $\alpha_m a^m$, α_m a a^m jsou komponenty

$T^{\underline{a_1}\dots\underline m\dots\underline{a_k}}_{\underline{b_1}\dots\underline m\dots\underline{b_l}}$

i-tý $\quad$ j-tý

* tím, že se jméno prostoru (abstr. ind) zopakuje efektivně zmizí ve výsledku



* C^j_i se nepoužívá (při každé aplikaci se sloty přečíslují)
* na kontrakce se bez-indexová notace nehodí; (abstraktní) indexy nebo diagramy jsou vhodnější
* diagramy vhodné pro výrazy s vysokou (anti)symetrií

stopa

$A^{\underline k}_{\underline l} \qquad A^{\underline k}_{\underline k} \qquad \mathrm{Tr}\,A$

operátor na vektor

$A : V\to V \qquad b^{\underline k} = A^{\underline k}_{\underline l}\, a^{\underline l}$

$b = A\cdot a$

jednotkový tenzor

$\delta^{\underline k}_{\underline l} \qquad a^{\underline k} = \delta^{\underline k}_{\underline l}\, a^{\underline l}$ (identita)

$\mathrm{Tr}\,\delta = \;\cdot\; = \delta^{\underline m}_{\underline m} = \delta^m_m = \dim V$

permutace na V^K (* nejobecnější propletení nožiček) 4

$P_\sigma : V^K \to V^K$ σ permutace čísel $1 \dots K$

$P_\sigma (u_1 \dots u_K) = u_{\bar\sigma_1} \dots u_{\bar\sigma_K}$ $\bar\sigma$ inverzní permutace

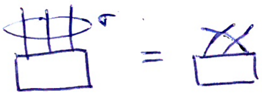
* součinový tenzor, pak rozšířím na V^K

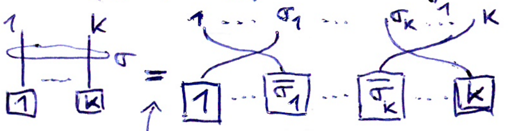
* pomocí abstraktních indexů platí

$(P_\sigma T)^{a_1 \dots a_K} = T^{a_{\sigma_1} \dots a_{\sigma_K}}$ * bez inverze protože

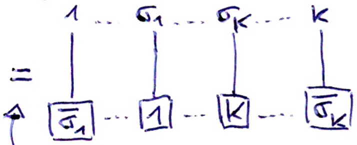
$(P_\sigma u_1 \dots u_K)^{a_1 \dots a_K} = u_{\bar\sigma_1}^{a_1} \dots u_{\bar\sigma_K}^{a_K} = u_1^{a_{\sigma_1}} \dots u_K^{a_{\sigma_K}}$

např.





* přečísluji vektory pomocí $\bar\sigma$ a seřadím $\boxed{1} \dots \boxed{K}$

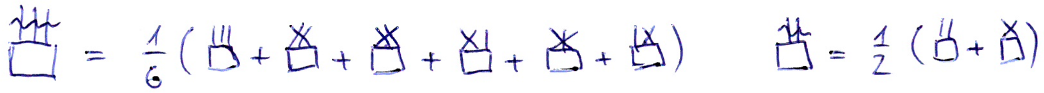


* držím za nohy a zatřesu, v indexech pak seřadím $a_{\sigma_1} \dots a_{\sigma_K}$

Symetrizace na V^K

$\mathcal{S} T = \frac{1}{K!} \sum_\sigma P_\sigma T$ * průměr všech permutací, je jich $K!$

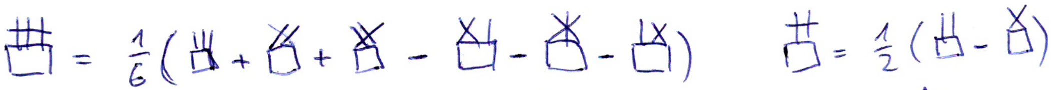
$(\mathcal{S} T)^{a_1 \dots a_K} = T^{(a_1 \dots a_K)}$ * lze taky dělat jen na podmnožinu indexů



antisymetrizace na V^K

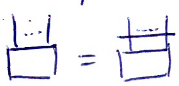
$\mathcal{A} T = \frac{1}{K!} \sum_\sigma \operatorname{sign} \sigma \, P_\sigma T$ * znaménko permutace (lichá permutace = lichý počet transpozic $\to$ mínus)

$(\mathcal{A} T)^{a_1 \dots a_K} = T^{[a_1 \dots a_K]}$



- prostor anti-sym tenzorů $V^{[K]} \subset V^K$, $\dim V^{[K]} = \binom{d}{K}$, $K = 0, 1, \dots, d$

$A \in V^{[K]} \Leftrightarrow A^{a_1 \dots a_K} = A^{[a_1 \dots a_K]}$,



* detailněji příště / na cvičení

${}^{[K]}\delta \in V_{[K]} \otimes V^{[K]}$ ${}^{[K]}\delta_{a_1 \dots a_K}^{b_1 \dots b_K} = \delta_{a_1}^{[b_1} \dots \delta_{a_K}^{b_K]} = \delta_{[a_1}^{b_1} \dots \delta_{a_K]}^{b_K}$ * projektor na $V^{[K]}$ $\left({}^{[K]}\delta\right)^2 = {}^{[K]}\delta$

$B^{[a_1 \dots a_K]} = {}^{[K]}\delta_{b_1 \dots b_K}^{a_1 \dots a_K} B^{b_1 \dots b_K}$ ${}^{[K]}\delta_{b_1 \dots b_\ell n_1 \dots n_{K-\ell}}^{a_1 \dots a_\ell n_1 \dots n_{K-\ell}} = \underbrace{\frac{(d-\ell)!\,\ell!}{(d-K)!\,K!}}_{\dim V^{[K]} / \dim V^{[L]}} {}^{[L]}\delta_{b_1 \dots b_\ell}^{a_1 \dots a_\ell}$

* prostor sym - viz zápisky/papír * spočte se stopováním

KOMPONENTY TENZORŮ (* SOUŘADNICE)

báze

V $\quad e_k \quad k = 1,\dots,d \quad d = \dim V$ * vektorová báze (číslovaná k, není to komponenta)

V^* $\quad e^k \quad e^k \cdot e_l = \delta^k_l \quad \forall k,l$ * duální kovektorová báze

V^K_L $\quad e_{m_1} \cdots e_{m_K} e^{n_1} \cdots e^{n_L}$ * báze tenzorů (K,L)

komponenty

$$a = a^m e_m$$

$$\alpha = \alpha_m e^m$$

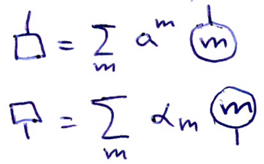
$$T = T^{m_1 \dots m_K}_{n_1 \dots n_L}\, e_{m_1} \cdots e_{m_K} e^{n_1} \cdots e^{n_L}$$

* zavedení tenzorů přes komponenty: hromada čísel $T^{m_1 \dots m_K}_{n_1 \dots n_L}$, $m_i, n_j = 1 \dots n$
 \+ transformace komponent při změně báze e

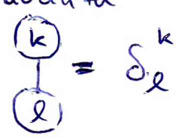
* přidejme abstraktní indexy: (→ poznám hned tenzor od čísla)

$$a^{\underline{c}} = a^m e^{\underline{c}}_m$$

$$\alpha_{\underline{c}} = \alpha_m e^m_{\underline{c}}$$



dualita



* a^m jsou čísla (komp.)
* $a^{\underline{c}}$ je vektor (abstraktní index a nožička jen říkají že to je vektor, podobně jako $\vec{a}$)

$$T^{\underline{c}_1 \dots \underline{c}_K}_{\underline{d}_1 \dots \underline{d}_L} = T^{m_1 \dots m_K}_{n_1 \dots n_L}\, e^{\underline{c}_1}_{m_1} \cdots e^{\underline{c}_K}_{m_K}\, e^{n_1}_{\underline{d}_1} \cdots e^{n_L}_{\underline{d}_L}$$

zúžení s bází + dualita

$$\Rightarrow T^{m_1 \dots m_K}_{n_1 \dots n_L} = T^{\underline{c}_1 \dots \underline{c}_K}_{\underline{d}_1 \dots \underline{d}_L}\, e^{m_1}_{\underline{c}_1} \cdots e^{m_K}_{\underline{c}_K}\, e^{\underline{d}_1}_{n_1} \cdots e^{\underline{d}_L}_{n_L}$$

* někdy není třeba odlišovat indexy a abstraktní indexy, když mi stačí jedno
* překlad je prosté přidání/odmazání podtržítek, když není použita speciální vlastnost báze, (tzn. báze je obecná)
  kontrola: $\alpha_{\underline{m}} a^{\underline{m}} = \alpha_k a^l e^k_{\underline{m}} e^{\underline{m}}_l = \alpha_k a^l \delta^k_l = \alpha_m a^m$
* při různých bázích nebo speciální bázi je třeba odlišovat

transformace komponent

e_k, $e_{k'}$ různé báze

$$a = a^k e_k = a^{k'} e_{k'}$$

* informaci schovám do "značky" indexu báze (čárka) (lépe než do písmene e, které jen říká že mluvíme o bázi) protože v komponentách se objevují báze indexy
* pohledem na a^k, $a^{k'}$ rovnou vidím v jaké bázi jsem
* xAct má barvy

$$e_{k'} = M^l_{k'} e_l\,, \quad e_k = M^{l'}_k e_{l'}$$

* přechodové matice $M^l_{k'}$, $M^{l'}_k$
  * komponenty jedné báze vůči druhé
  * navzájem inverzní
  * poloha čárky sama zařizuje správný směr transformace

$$M^{m'}_l M^k_{m'} = \delta^k_l$$

* transformace tam a zpět = identita

* "zn." čárkovaných a osamocených indexů musí být stejné ...

* z duality báze:

$$e^{k'} = M^{k'}_{\ell} e^{\ell}, \quad e^{k} = M^{k}_{\ell'} e^{\ell'}$$

* dosazením do $a^k e_k = a^{k'} e_{k'}$:

$$a^k = M^k_{\ell'} a^{\ell'} \qquad a^{k'} = M^{k'}_{\ell} a^{\ell'}$$

* "zn." indexů zajistí, že to je správně

* obecný tenzor čistě kompatibilitou "zn." indexů

$$T^{m_1' \dots m_k'}_{n_1' \dots n_L'} = T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_L} M^{m_1'}_{a_1} \dots M^{m_k'}_{a_k} M^{b_1}_{n_1'} \dots M^{b_L}_{n_L'}$$

význam matice přechodu

$e_{k'} = M^{\ell}_{k'} e_{\ell}$ * ℓ-tá komp. k'-tého vektoru báze

$e^{\ell} = M^{\ell}_{k'} e^{k'}$ * k'-tá komp. ℓ-tého kovektoru báze

} stejné

$$\delta = \delta^{\ell}_{m} e_{\ell} e^{m} = \delta^{\ell}_{m} M^{m}_{k'} e_{\ell} e^{k'} = M^{\ell}_{k'} e_{\ell} e^{k'} \Rightarrow M^{\ell}_{k'} = \delta^{\ell}_{k'}$$

$$e^m = M^m_{k'} e^{k'}$$

navíc $\delta^{\ell}_{k'} = \delta^{c}_{d} e^{\ell}_{c} e^{d}_{k'} = e^{\ell} \cdot e_{k'}$

podobně $M^{\ell'}_{k} = \delta^{\ell'}_{k} = e^{\ell'} \cdot e_k$

* matice přechodu je komponenta jednotkového tenzoru vůči různým bázím
* stejné báze = identita

*pozn: Feynman diagramy obdoba diagram. notace na ∞-dim prostorech (spojitý index x)

TENZORY - UNIVERS. LIN. ZOBR

* lineární operace mezi tenzory lze reprezentovat tenzorově
* zavedení tenzorů přes multi-lin. zobrazení do $\mathbb{R}$ je speciální případ

$$\ell : V^{K_1}_{L_1} \times V^{K_2}_{L_2} \times \dots \to V^{K}_{L}$$

multilineární

reprezentace tenzorem L

$$\ell^{A}(T_1, T_2, \dots) = L^{A}_{A_1 A_2 \dots} T_1^{A_1} T_2^{A_2} \dots$$

* A jsou multi-indexy odpovídající horním i dolním indexům V^K_L

* má indexy výsledku a duální indexy argumentů

* vyjádřeno v komponentách $\to$ sčítání = lin. operace
* opačně: každá lineární operace je sčítání

* písmeno ℓ a L se běžně nerozlišuje

Př $\ell: V \times V^1_2 \to V^*$

$$\ell_a(u,A) = L_{a\,pq}^{\;mn}\; u^p A^q_{mn}$$

$u = u^p e_p,\; A = A^q_{mn}\, e_q e^m e^n$ — * vložím do argumentů a zúžím s e^a_a abych dostal ℓ_a

$$e^a_a\, \ell_a(u,A) = \cancel{u^p A^q_{mn}}\, e^a_a\, \ell_a(e_p, e_q e^m e^n)$$
$$= L_{a\,pq}^{\;mn}\, u^p \cancel{A^q_{mn}}$$

* komponenty L získám aplikací na bázi (V prostorech V a V^1_2) a zúžením s duální bází výsledku

* přidáním báze pak získám tenzor
* postup nezávisí na volbě báze (báze byla obecná)

* jeden tenzor reprezentuje více zobrazení

$A: V \to V$	$A: V^* \to V^*$	$A: V^1_1 \to \mathbb{R}$
$b^m = A^m_n\, a^n$	$\beta_n = A^m_n\, \alpha_m$	$r = A^m_n\, B^n_m$
$= (A\cdot a)^m$	$= (\alpha \cdot A)_n$	$= \mathrm{Tr}(A\cdot B)$

$$A: \underbrace{V \times \dots \times V}_{K} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{L} \to \mathbb{R}$$

* definice z lin. alg. (multi-lin. zobr. je ekvivalentní tenzoru samotnému)

$$A(a_1,\dots,a_K,\alpha^1,\dots,\alpha^L) = A^{n_1\dots n_L}_{m_1\dots m_K}\; a_1^{m_1}\dots a_K^{m_K}\, \alpha^1_{n_1}\dots \alpha^L_{n_L}$$

* my preferujeme objektový pohled (různá zobrazení mezi tenz. pro daný tenzor).

TENZOROVÁ POLE

$V = \mathbb{T}_x M \quad V^* = \mathbb{T}^*_x M \qquad V^K_L = \mathbb{T}_x{}^K_L\, M$

* vekt. prostor bude teď tečný prostor M v bodě x, (podobně kotečný a tečný tenzorový)

Def: tenzorové pole typu (K,L)

$\mathcal{T}^K_L M$: prostor řezů tečného bundlu $\mathbb{T}^K_L M$

$\ni$

$A: M \to \mathbb{T}^K_L M$

$x \to A(x) \in \mathbb{T}_x{}^K_L M$ — * tečný tenzor v každém bodě

$$\mathcal{T}^K_L M \simeq \underbrace{\mathcal{T}M \tilde\otimes \dots \tilde\otimes \mathcal{T}M}_{K} \tilde\otimes \underbrace{\mathcal{T}^*M \tilde\otimes \dots \tilde\otimes \mathcal{T}^*M}_{L} \qquad \tilde\otimes = \otimes_{\mathcal{F}M}$$

* $\mathcal{F}M$-tenz. součin $\mathcal{F}M$-modulů $\mathcal{T}M$ a $\mathcal{T}^*M$
* je to modul nad $\mathcal{F}M$ ($\mathbb{T}_x{}^K_L M$ byl vekt. prostor nad $\mathbb{K}$)

TENZOROVÁ POLE – UNIVERS. FM-LIN. ZOBR

$f(x) A^{m\dots}_{n\dots}(x)$ * dá nové pole, tzn. umím násobit fcí (skal. polem) bod po bodu

* přenásobím fcí která je 0 všude až na okolí x → vybere jen hodnoty v okolí x
* "FM-linearita" říká že lze rozebrat bod po bodu

$$\ell : T^{K_1}_{L_1}M \times T^{K_2}_{L_2}M \times \dots \to T^{K}_{L}M$$

FM-lineární

$$\ell(\dots, fA, \dots) = f\,\ell(\dots, A, \dots)$$
$$\ell(\dots, A+B, \dots) = \ell(\dots, A, \dots) + \ell(\dots, B, \dots)$$

"ultralokalita"

* "lokalita" – důležité jen okolí
* "ultralok." – závisí dokonce jen bod od bodu nezávisle na sobě

* budeme moci zadefinovat FM-lineární operace, ale "skutečné derivace" naopak FM-lin. nebudou

$$\Rightarrow \ell^{A}(T_1, T_2, \dots) = L^{A}{}_{B_1 B_2}(x)\, T_1^{B_1}(x)\, T_2^{B_2}(x)$$

* tzn. lze reprezentovat tenzorovým polem L

* díky ultralok. lze převést na předchozí tvrzení bod po bodu

TENZOROVÉ DERIVACE

* obecná definice – patří tam i věci co nejsou "skutečné derivace" v pravém slova smyslu

Def: D je tenz. derivace

$D : T^K_L M \to T^K_L M$ * umí působit rovnou na tenz. polích lib. typů

$D(A+B) = DA + DB$ * linearita vůči součtu

$D(AB) = (DA)B + A(DB)$ * Leibniz vůči tenz. součinu $\otimes$

$D(\mathcal{C}A) = \mathcal{C}DA$ * komutace s kontrakcí

* vlastnosti nejsou jednoznačné (takových D je hodně)

Zobecnění: D může přidat extra indexy
* derivace ve směru nepřidává index
* diferenciál přidává jeden index

$$D : T^K_L M \to T^{K+P}_{L+Q} M$$

$$D^{p\dots}_{q\dots} A^{a\dots}_{b\dots}$$

* v extra indexech bude ultralok.
* tzn. pouze přidávají závislost na zob. směru

$$D_T = T^{q\dots}_{p\dots} D^{p\dots}_{q\dots}$$ převede na předchozí

$$\underset{\text{FM-lin.}}{\Leftrightarrow} \quad D_{fT} = f D_T$$

* furt není ultralok. v poli na které působí

Př $\mathcal{L}_a$ ∇_a F_a ... D

$\nabla_{\underline{n}}$ ... $D_{\underline{n}}$

Lemma: restrikce D na $\mathcal{F}M$

je dána vekt. polem

$$Df = a \cdot df = a[f]$$

* def. tenz. derivace přejde na derivace na skalárních polích (fcích) což jsou přímo vektorová pole
* D které je definované na tenzorech už má v sobě info o směru (tj. směr ve kterém derivuje skaláry)

Věta: D_1, D_2 tenz. derivace

shodné na $\mathcal{F}M$ a TM

$\Rightarrow D_1 = D_2$

* není jich až tak moc - akce na $\mathcal{F}M$ a TM už je určují
* akce na lib. tenz. poli už je pak určena
* důk. za chvíli

Def: pseudoderivace * speciální derivace, co nejsou "skutečné derivace"

- $\mathbf{M}$ je tenz. der. (* včetně zobecnění)
- $\mathbf{M} f = 0$ $f \in \mathcal{F}M$

$\Downarrow$ ultralokalita

$$\mathbf{M}(fA) = \underbrace{(\mathbf{M} f)}_{0} A + f \mathbf{M} A$$

Lemma: $\mathbf{M}$ je dáno akcí na TM

důk: $\mathcal{F}M$-lin. $\Rightarrow (\mathbf{M} a)^{\underline{m}} = \mathbf{M} a^{\underline{m}} = M^{\underline{m}}_{\underline{n}} a^{\underline{n}}$ * stačí znát $M^{\underline{m}}_{\underline{n}}$

* nepřidané indexy (budeme vysvětlovat)

* umíme akci na tenzorech vyjádřit pomocí $M^{\underline{m}}_{\underline{n}}$
* na kovektorech, což jsou lin. fcionály na vektorech $a^{\underline{n}}$

$\mathbf{M} \alpha_{\underline{n}}$ $(\mathbf{M} \alpha_{\underline{n}}) a^{\underline{n}}$

$$0 = \mathbf{M}(\alpha_{\underline{n}} a^{\underline{n}}) = (\mathbf{M} \alpha_{\underline{n}}) a^{\underline{n}} + \alpha_{\underline{n}} \underbrace{\mathbf{M} a^{\underline{n}}}_{M^{\underline{n}}_{\underline{m}} a^{\underline{m}}} \Rightarrow (\mathbf{M} \alpha_{\underline{n}}) a^{\underline{n}} = -\alpha_{\underline{m}} M^{\underline{m}}_{\underline{n}} a^{\underline{n}}$$

* $\mathbf{M} f = 0$ * komutace s kontrakcí * Leibniz * přejmen. indexů

$$\Rightarrow \mathbf{M} \alpha_{\underline{n}} = - M^{\underline{m}}_{\underline{n}} \alpha_{\underline{m}}$$

* druhy linearitě M stačí zkoumat součinové tenz.

$$M(a^m b^n \dots \alpha_k \beta_l \dots)$$
$$= (Ma^m) b^n \dots \alpha_k \beta_l \dots + a^m (Mb^n) \dots \alpha_k \beta_l \dots + \dots + a^m b^n \dots (M\alpha_k) \beta_l \dots + \dots$$

* multi-Leibniz

* rozebrali jsme na působení na vektory a kovektory

$$= M^m_{\ p} a^p b^n \dots \alpha_k \beta_l \dots + M^n_{\ p} a^m b^p \dots \alpha_k \beta_l \dots + \dots$$
$$- M^q_{\ k} a^m b^n \dots \alpha_q \beta_l \dots - M^q_{\ l} a^m b^n \dots \alpha_k \beta_q \dots - \dots$$

* na strukturu Christof. symbolů

* na obecný tenzor z linearity

$$MT^{mn\dots}_{kl\dots} = M^m_{\ p} T^{pn\dots}_{kl\dots} + M^n_{\ p} T^{mp\dots}_{kl\dots} + \dots$$
$$- M^q_{\ k} T^{mn\dots}_{ql\dots} - M^q_{\ l} T^{mn\dots}_{kq\dots} - \dots$$

* struktura dána tím, že to je pseudoderivace
* kdykoli narazíme na pseudoder. stačí nám najít $M^m_{\ n}$ z akce na vektorech a už víme vzorec na obecných tenzorech

* tzn. vlastnost pseudoderivace umožňují akci na vektorech rozšířit na tenzory

Věta: D_1, D_2 tenz. der. shodné na $\mathcal{F}M$
$\Rightarrow D_2 = D_1 + M$ $\quad M$ pseudoderivace
tzn. $M = D_2 - D_1$

* to znamená že vekt. pole odpovídající jejich akci na $\mathcal{F}M$ jsou stejná $a_1 = a_2$

* rozdíl je určitě tenz. derivace (splňuje lin., Leib., kom. s $\mathfrak{C}$)
a současně $Mf = 0$ (pže $D_1 f = D_2 f$)

* pokud mají tenz. derivace stejný směr, tak se liší o pseudoder.

* navíc M je dáno akcí na TM ... $M^m_{\ n}$ (* viz předch. Lemma)

* pokud D_2 a D_1 působí stejně i na TM, pak $M^m_{\ n} = 0$, a tedy $D_2 = D_1$, což je důkaz první věty

Význam pseudoderivace

* pseudoder. je tenzorová reprezentace Lie. algebry grupy obecné lin. transformace

G $\quad$ $\mathcal{F}M$-lin. nedeg. transf. na TM $\quad$ (* není ještě pseudoder.)

$\Rightarrow (Ga)^m = G^m_{\ n} a^n$

* lze reprezentovat tenzorem $G^m_{\ n}$
* nedegenerovanost $\Rightarrow$ $G^m_{\ n}$ má inverzi
* $G^m_{\ n}$ je vektorová reprezentace grupy lin. transf. tečného vekt. prostoru $GL(T)_x M$, tzn. $G^m_{\ n} = T_{G\ n}^{\ m}$, $G \in$

$\Downarrow$ * komutace s $\mathfrak{C}$ a $\otimes$ rozšíříme na obecný tenzor

$$(GT)^{ab\dots}_{cd\dots} = G^a_{\ m} G^b_{\ n} \dots G^{-1k}_{\ \ c} G^{-1l}_{\ \ d} \dots T^{mn\dots}_{kl\dots}$$

* komutace s $\otimes$: $G(a^m b^n) = (Ga^m)(Gb^n) \Rightarrow$ pro každý index $G^m_{\ n}$

* komutace s $\mathfrak{C}$: $G(a^m \alpha_m) = (Ga^m)(G\alpha_m) = G^m_{\ l} a^l \tilde{G}^k_{\ m} \alpha_k \Rightarrow \tilde{G} = G^{-1}$

$\quad \| $
$a^m \alpha_m$

* na skaláru nesmí nic dělat

$$G_{\varepsilon}{}^{a}{}_{b} = \delta^{a}_{b} + \varepsilon M^{a}_{b} + O(\varepsilon^2)$$

* malé odchylky transf. od identity odpovídají prvkům Lie. algebry $gl(T)_x M$ groupy $GL(T)_x M$ $\overset{\in}{m}$
* její vektorová reprezentace je dána M^a_b, tzn. $t_{m}{}^{a}{}_{b} = M^{a}_{b}$

$$(G_\varepsilon T)^{ab\dots}_{cd\dots} = (\delta^a_m + \varepsilon M^a_m)(\delta + \varepsilon M)\dots(\delta^k_c - \varepsilon M^k_c)(\delta - \varepsilon M)\dots T^{mn\dots}_{kl\dots}$$

$$= T^{ab\dots}_{cd\dots} + \varepsilon\left[M^a_m T^{mb\dots}_{cd\dots} + MT + \dots - M^k_c T^{ab\dots}_{kd\dots} - MT - \dots\right] + O(\varepsilon^2)$$

$$= T^{ab\dots}_{cd\dots} + \varepsilon M T^{ab\dots}_{cd\dots}$$

* tenzorová repr. $gl(T)_x M$ (Lie. algebry grupy obecně lin. transformací)

PŘ: AS DEKOMPOZICE

$$(p+1)\,\alpha_{[\underline{a}}\,\omega_{\underline{a}_1\ldots\underline{a}_p]} = \alpha_{\underline{a}}\,\omega_{\underline{a}_1\ldots\underline{a}_p} - \alpha_{\underline{a}_1}\,\omega_{\underline{a}\,\underline{a}_2\ldots\underline{a}_p} - \alpha_{\underline{a}_2}\,\omega_{\underline{a}_1\underline{a}\ldots\underline{a}_p} \;\vdots\; - \alpha_{\underline{a}_p}\,\omega_{\underline{a}_1\underline{a}_2\ldots\underline{a}}$$

$\omega \in V_{[p]}$

$\alpha \in V_1$

* rozpis (p+1) asym. s uvážením $\frac{(p+1)}{(p+1)!} = \frac{1}{p!}$

* seskupení $\omega \in V_{[p]}$

* prohození indexů

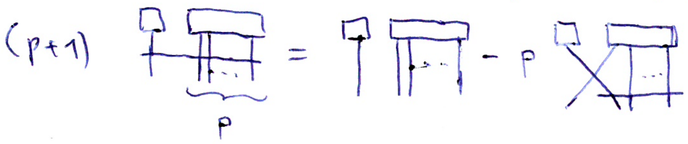
$+\,\alpha_{\underline{a}_2}\,\omega_{\underline{a}\,\underline{a}_1\ldots\underline{a}_p}$

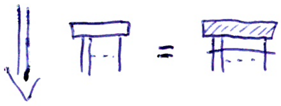
$\vdots$

$(-1)^p\,\alpha_{\underline{a}_p}\,\omega_{\underline{a}\,\underline{a}_1\ldots\underline{a}_{p-1}}$

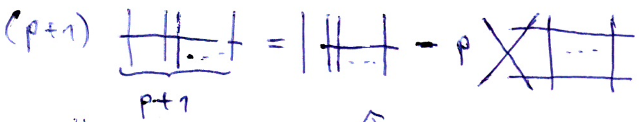
$$= \alpha_{\underline{a}}\,\omega_{\underline{a}_1\ldots\underline{a}_p} - p\,\alpha_{[\underline{a}_1}\,\omega_{|\underline{a}|\underline{a}_2\ldots\underline{a}_p]}$$

* seskupení do p asym. s fixovaným $\underline{a}$ a uvážením $\frac{1}{(p-1)!} = \frac{p}{p!}$
(jako v prvním kroku, ale opačně)



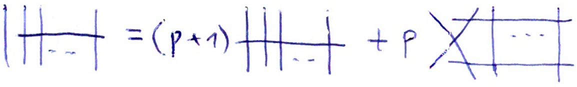
 a utrhu 

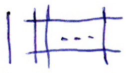
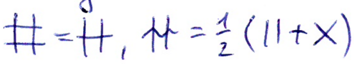
odpovídá v indexech identitě

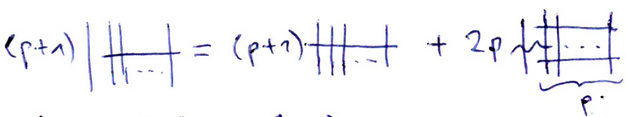
 (1)

$$(p+1)\,\delta^{[p+1]\,b_0\ldots b_p}_{\;a_0\ldots a_p} = \delta^{b_0}_{a_0}\,\delta^{[p]\,b_1\ldots b_p}_{\;a_1\ldots a_p} - p\,\delta^{[b_1}_{a_0}\,\delta^{|b_0|}_{[a_1}\,\delta^{b_2}_{a_2}\cdots\delta^{b_p]}_{a_p]}$$

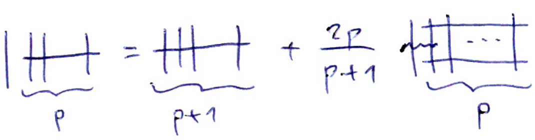
⇓ osamostatním



⇓ + p  na obě strany
a využiji 



⇓ vydělím (p+1)



(2) rozštěpení na podprostory

$$\delta^{(1)[p]} = A + S$$

$$\underset{\text{sym}}{\gamma_{\underline{a}\,\underline{a}_1\ldots\underline{a}_p}} = \beta_{(\underline{a})\underline{a}_1\ldots\underline{a}_p} + \sigma_{\underline{a}[\underline{a}_1\ldots\underline{a}_p]}$$

sym asym.

zprostředkovává rozklad takovýchto tenzorů na 2 části

$$\gamma \to \beta \oplus \sigma$$

$$\underline{01\ldots p} \to \underline{01\ldots p} \oplus \underline{012\ldots p}$$

* jedna část má (p+1)-asym. z γ a druhá má 2-sym a (p-1)-asym z γ

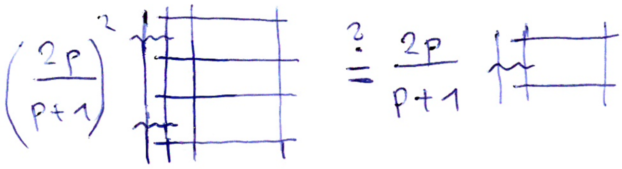
$$\beta_{\underline{a}\underline{a}_1\ldots\underline{a}_p} = \gamma_{[\underline{a}\underline{a}_1\ldots\underline{a}_p]}$$

$$\sigma_{\underline{a}\underline{a}_1\ldots\underline{a}_p} = \frac{2p}{p+1}\,\gamma_{(\underline{a}\,\underline{a}_1)\underline{a}_2\ldots\underline{a}_p}$$

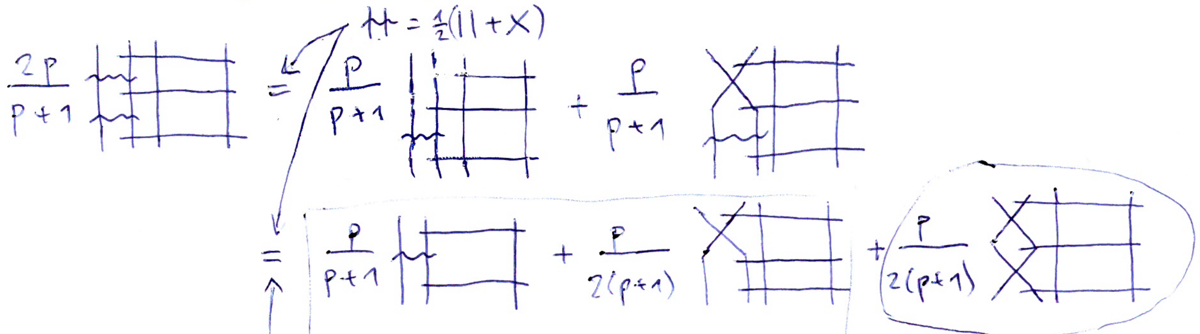
* na obecný tenzor fungují jako projektory

$$\delta^{(1)[p]} = A + S \;,\; \text{platí}\; \left(\delta^{(1)[p]}\right)^2 = \delta^{(1)[p]} \;,\; A^2 = A \;,\; A\cdot S = 0 \Rightarrow S^2 = S$$

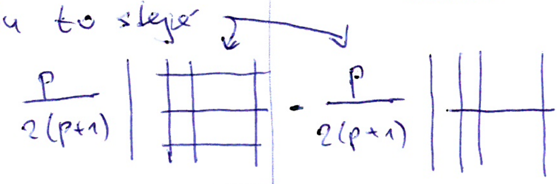
Dokažte $S^2=S$ přímo:



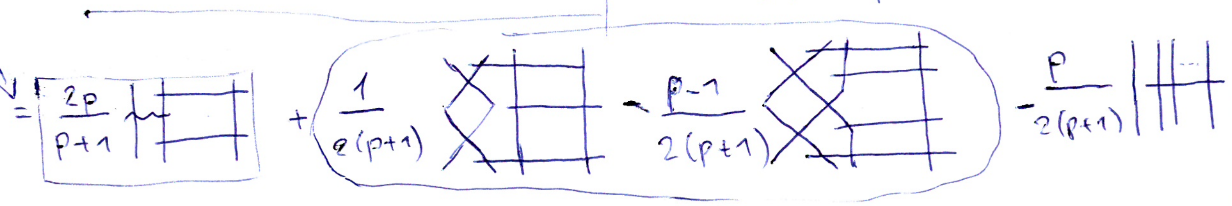
pokračím a využiju



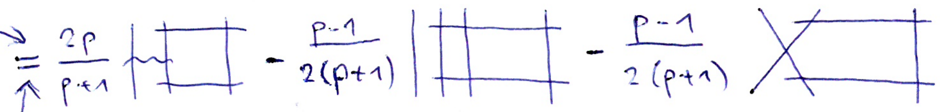
* přičtu a odečtu to stejné



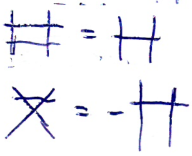
* sečtu
a využiju (1)
(s pno žičkami)
na vnitřek

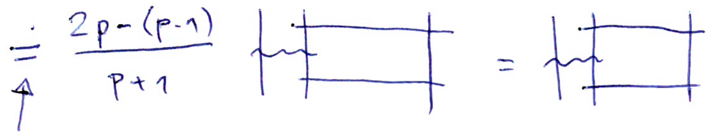


* rozmotám nožičky
a sečtu
druhý a čtvrtý,



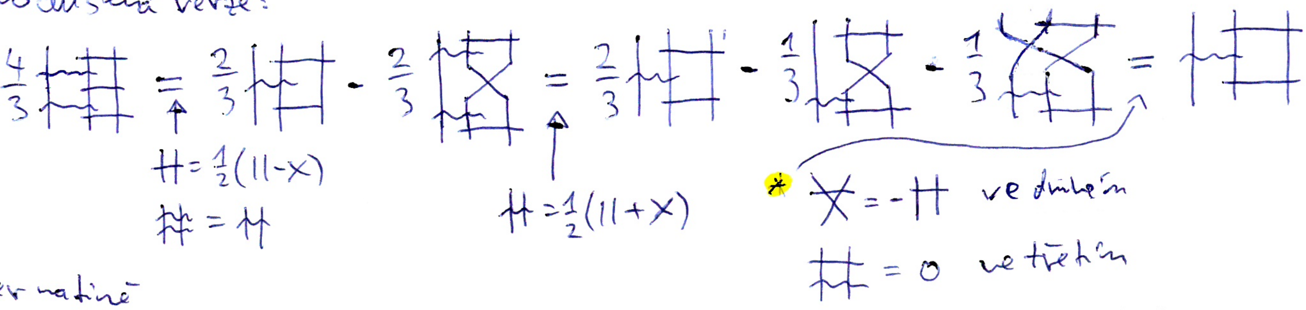
* ve třetím použiju





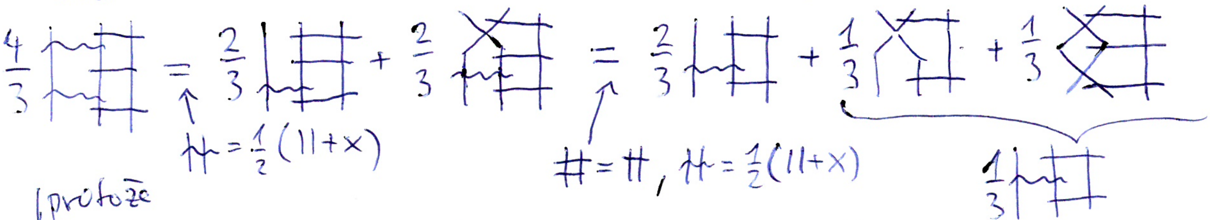
využiju $= \frac{1}{2}(|| + X)$ a sečtu

zjednodušená verze:

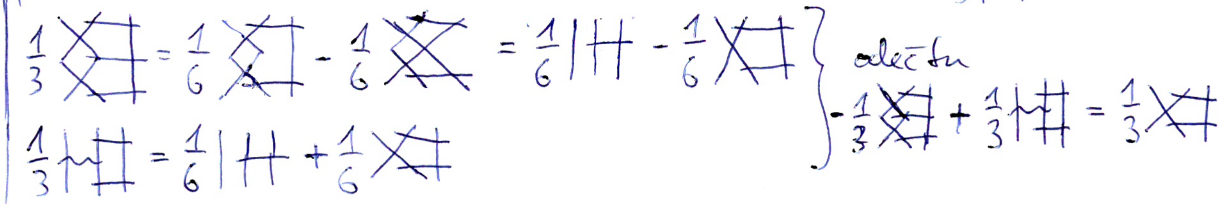


* ve druhém
ve třetím

alternativně



protože



a sečtu

Prostor antisymetrických tenzorů

definice:

$V^{[k]} \subset V^k$ je prostor antisymetrických tenzorů k-tého stupně, $k = 0, \dots, d$; $\quad \dim V^{[k]} = \binom{d}{k}$

$$A \in V^{[k]} \quad \equiv \quad \forall \sigma - \text{permutace } [1, \dots, k] \;:\quad A^{a_1 \dots a_k} = \operatorname{sign} \sigma \; A^{a_{\sigma_1} \dots a_{\sigma_k}}$$

antisymetrizace:

$$A = \mathcal{A} B \qquad A^{a_1 \dots a_k} = B^{[a_1 \dots a_k]} = \frac{1}{k!} \sum_\sigma \operatorname{sign} \sigma \; B^{a_{\sigma_1} \dots a_{\sigma_k}}$$

$$A \in V^{[k]} \quad \Leftrightarrow \quad A^{a_1 \dots a_k} = A^{[a_1 \dots a_k]}$$

projektor na $V^{[k]}$:

$${}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_k} = \delta^{[a_1}_{b_1} \dots \delta^{a_k]}_{b_k} = \delta^{a_1}_{[b_1} \dots \delta^{a_k}_{b_k]} \qquad , \qquad {}^{[k]}\delta \in V^{[k]}_{[k]}$$

vlastnosti projektoru:

$${}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_k}_{r_1 \dots r_k} \, {}^{[k]}\delta^{r_1 \dots r_k}_{b_1 \dots b_k} = {}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_k} \qquad , \qquad A^{[a_1 \dots a_k]} = {}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_k}_{r_1 \dots r_k} \, A^{r_1 \dots r_k}$$

$${}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_{k-l} a_{k-l+1} \dots a_k}_{b_1 \dots b_{k-l} r_1 \;\dots\; r_l} \, {}^{[l]}\delta^{r_1 \;\dots\; r_l}_{b_{k-l+1} \dots b_k} = {}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_k}$$

$${}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_l r_1 \dots r_{k-l}}_{b_1 \dots b_l r_1 \dots r_{k-l}} = \frac{(d-l)!\, l!}{(d-k)!\, k!} \, {}^{[l]}\delta^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_l} \qquad , \qquad {}^{[k]}\delta^{r_1 \dots r_k}_{r_1 \dots r_k} = \dim V^{[k]}$$

$${}^{[k]}\delta^{a_{\sigma_1} \dots a_{\sigma_k}}_{b_{\sigma_1} \dots b_{\sigma_k}} = {}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_k} \qquad \sigma \text{ je permutace } [1, \dots, k]$$

souřadnice:

$$A = A^{a_1 \dots a_k} \, \vec{e}_{a_1} \dots \vec{e}_{a_k} = \sum_{a_1 < \dots < a_k} A^{a_1 \dots a_k} \; k! \; \mathcal{A}(\vec{e}_{a_1} \dots \vec{e}_{a_k})$$

totálně antisymetrické formy a tenzory:

prostory $V_{[d]}$ a $V^{[d]}$, kde d je dimenze prostoru V; $\qquad \dim V_{[d]} = \dim V^{[d]} = 1$
souřadnice ($\alpha \in V_{[d]}$):

$$\alpha = \alpha_{a_1 \dots a_d} \, \underset{\to}{e}^{a_1} \dots \underset{\to}{e}^{a_d} = \alpha_{1 \dots d} \sum_\sigma \operatorname{sign} \sigma \; \underset{\to}{e}^{\sigma_1} \dots \underset{\to}{e}^{\sigma_d} = \alpha_{1 \dots d} \; d! \; \mathcal{A}(\underset{\to}{e}^{1} \dots \underset{\to}{e}^{d})$$

inverze:

$${}^{-1} \;:\; V_{[d]} \leftrightarrow V^{[d]} \; , \quad \alpha \to \alpha^{-1} \; , \quad (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha \; , \quad \alpha_{r_1 \dots r_d} \, \alpha^{-1\, r_1 \dots r_d} = d!$$

vlastnosti inverze:

$$\alpha_{b_1 \dots b_k r_1 \dots r_{d-k}} \, \alpha^{-1\, a_1 \dots a_k r_1 \dots r_{d-k}} = (d-k)!\, k! \; {}^{[k]}\delta^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_k}$$

$$\alpha_{b_1 \dots b_d} \, \alpha^{-1\, a_1 \dots a_d} = d! \; {}^{[d]}\delta^{a_1 \dots a_d}_{b_1 \dots b_d} \qquad , \qquad \alpha_{r_1 \dots r_d} \, \alpha^{-1\, r_1 \dots r_d} = d!$$

$$\alpha^{-1\, 1 \dots d} = (\alpha_{1 \dots d})^{-1}$$

determinant:

$$\det A = {}^{[d]}\delta^{a_1 \dots a_d}_{b_1 \dots b_d} \, A^{b_1}_{a_1} \dots A^{b_d}_{a_d} = \sum_\sigma \operatorname{sign} \sigma \; A^{\sigma_1}_1 \dots A^{\sigma_d}_d \qquad , \qquad A \in V^1_1$$

Prostor symetrických tenzorů

definice:

$V^{(k)} \subset V^k$ je prostor symetrických tenzorů k-tého stupně, $k \in \mathbb{N}_0$; $\quad \dim V^{(k)} = \binom{k+d-1}{k}$

$$A \in V^{(k)} \quad \equiv \quad \forall\, \sigma - \text{permutace } [1,\dots,k] \;:\quad A^{a_1\dots a_k} = A^{a_{\sigma_1}\dots a_{\sigma_k}}$$

symetrizace:

$$A = \mathcal{S}B \qquad A^{a_1\dots a_k} = B^{(a_1\dots a_k)} = \frac{1}{k!}\sum_\sigma B^{a_{\sigma_1}\dots a_{\sigma_k}}$$

$$A \in V^{(k)} \quad \Leftrightarrow \quad A^{a_1\dots a_k} = A^{(a_1\dots a_k)}$$

projektor na $V^{(k)}$:

$$^{(k)}\delta^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_k} = \delta^{(a_1}_{b_1}\dots\delta^{a_k)}_{b_k} = \delta^{\,a_1}_{(b_1}\dots\delta^{a_k}_{b_k)} \qquad , \qquad {}^{(k)}\delta \in V^{(k)}_{(k)}$$

vlastnosti projektoru:

$$^{(k)}\delta^{a_1\dots a_k}_{r_1\dots r_k}\,{}^{(k)}\delta^{r_1\dots r_k}_{b_1\dots b_k} = {}^{(k)}\delta^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_k} \qquad , \qquad A^{(a_1\dots a_k)} = {}^{(k)}\delta^{a_1\dots a_k}_{r_1\dots r_k}\,A^{r_1\dots r_k}$$

$$^{(k)}\delta^{a_1\dots a_{k-l}a_{k-l+1}\dots a_k}_{b_1\dots b_{k-l}r_1\quad\dots\quad r_l}\,{}^{(l)}\delta^{r_1\quad\dots\quad r_l}_{b_{k-l+1}\dots b_k} = {}^{(k)}\delta^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_k}$$

$$^{(k)}\delta^{a_1\dots a_l r_1\dots r_{k-l}}_{b_1\dots b_l r_1\dots r_{k-l}} = \frac{(k+d-1)!\,l!}{(l+d-1)!\,k!}\,{}^{(l)}\delta^{a_1\dots a_l}_{b_1\dots b_l} \qquad , \qquad {}^{(k)}\delta^{r_1\dots r_k}_{r_1\dots r_k} = \dim V^{(k)}$$

$$^{(k)}\delta^{a_{\sigma_1}\dots a_{\sigma_k}}_{b_{\sigma_1}\dots b_{\sigma_k}} = {}^{(k)}\delta^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_k} \qquad \sigma \text{ je permutace } [1,\dots,k]$$

souřadnice:

$$A = A^{a_1\dots a_k}\,\vec{e}_{a_1}\dots\vec{e}_{a_k} = \sum_{a_1\le\dots\le a_k} A^{a_1\dots a_k}\;n(a_1,\dots,a_k)\;\mathcal{S}(\vec{e}_{a_1}\dots\vec{e}_{a_k})$$

$n(a_1,\dots,a_k)$ je počet vzájemně odlišných permutací indexů $a_1\dots a_k$